典型优化问题的模型与算法

(Models and Algorithms for Typical Optimization Problems)

主讲人：朱晗
东北财经大学 管理科学与工程学院
hanzhu@dufe.edu.cn

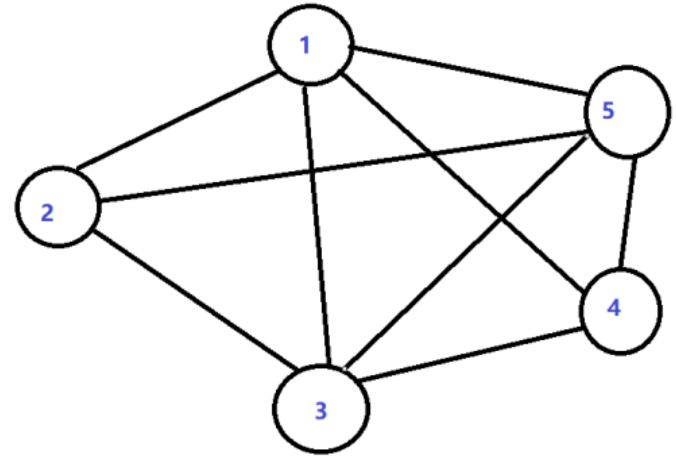
感谢东北大学系统工程研究所课程组

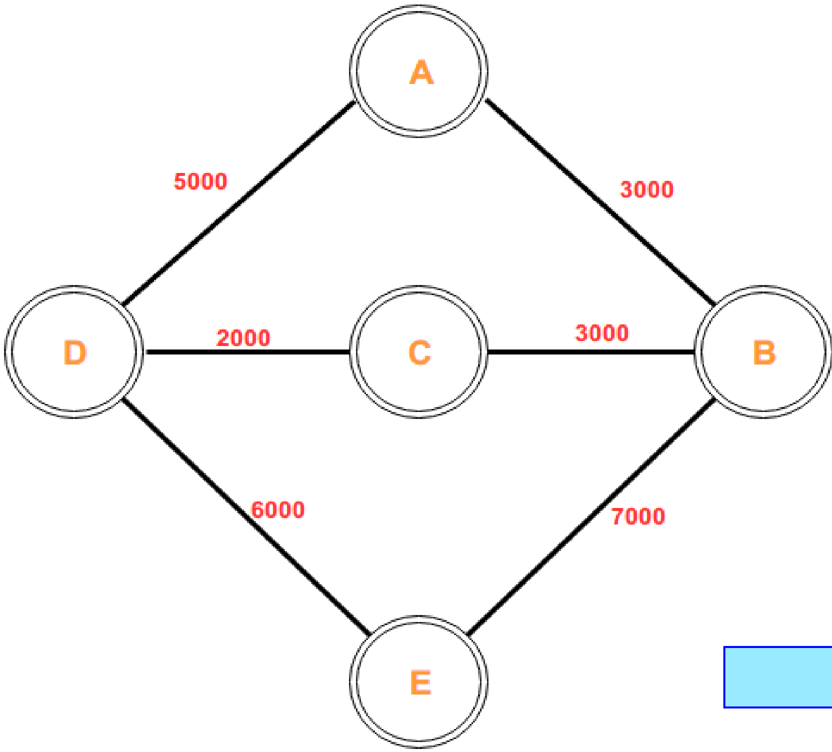
最小生成树问题
(Minimum Spanning Tree Problem-MSTP)

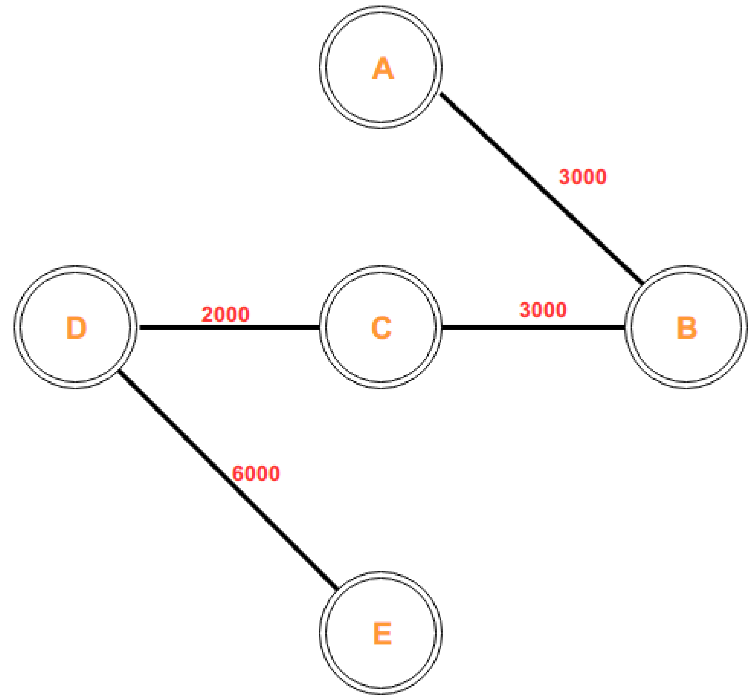
- 什么是图
- 最小生成树问题
- MSTP的模型与特征
- MSTP问题的应用领域
- MSTP问题的分类
- MSTP的求解算法

第十章 最小生成树问题及求解算法

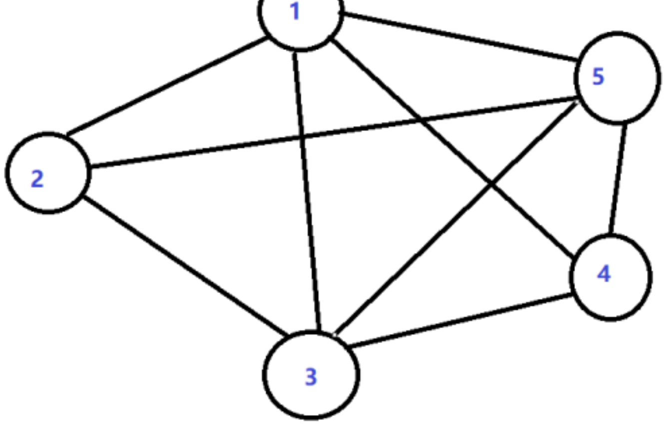
什么是图





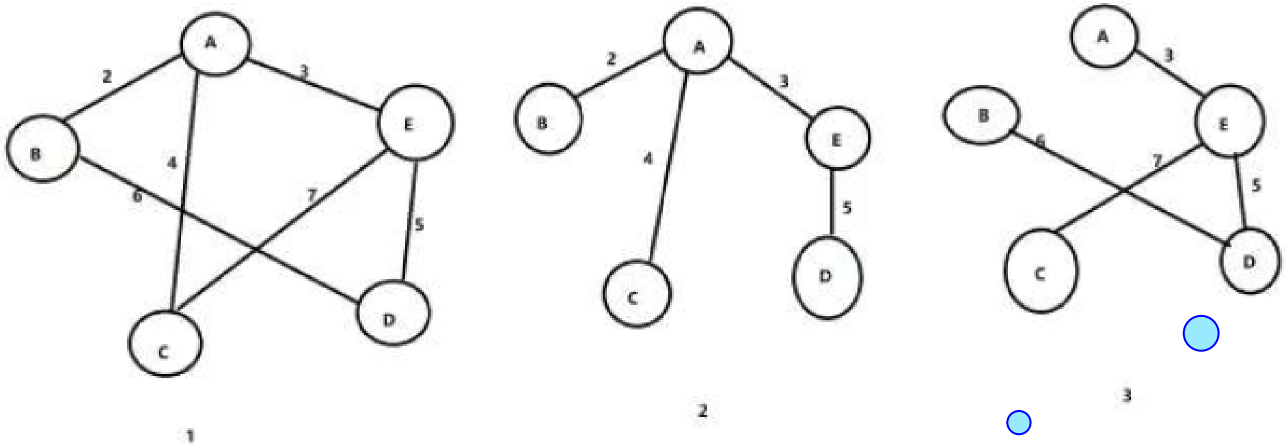


最小生成树问题



什么是最小生成树

为了直观，还是用图片给大家解释一下：



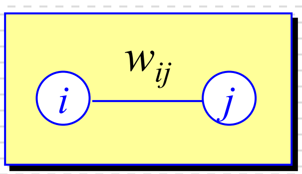
最少费用？

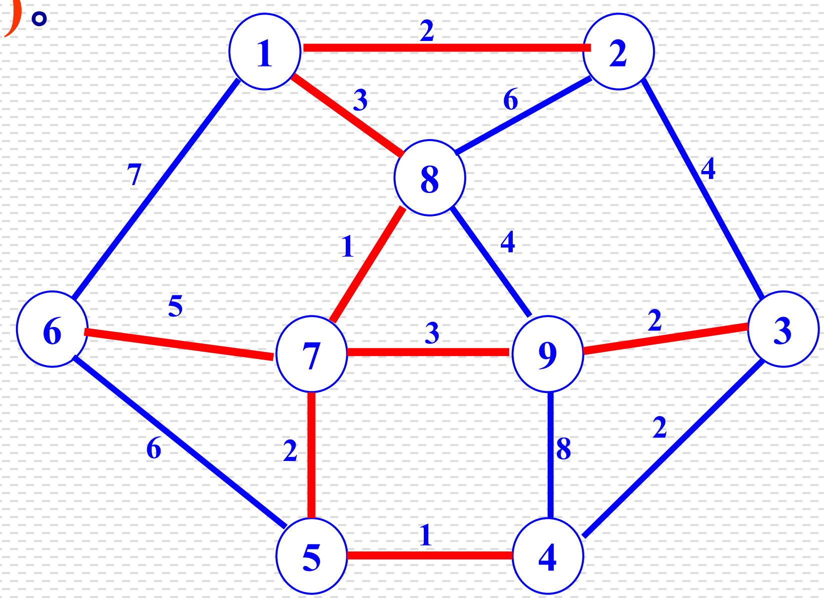
- 对于一个图而言，**它可以生成很多树**，如右侧**图2**，**图3**就是由**图1**

原图的全部顶点以最少的边连通的子图

最小生成树问题

- **Boruvka于1926 年首次提出该问题，目的是寻找电力线网络最经济的布局。此后最小生成树问题被广泛应用于许多组合优化问题中。**
- **考虑连通图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是顶点的有限集合，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 是边的有限集合。每个边有一个正实数权重 $W=\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ 用来表示距离或费用。**
- **最小生成树问题就是寻找图 G 中连接所有顶点的具有最小权重的子图 (生成树)。**





i	j	w_{ij}
1	2	2
1	6	7
1	8	3
2	3	4
2	8	6
3	4	2
…		

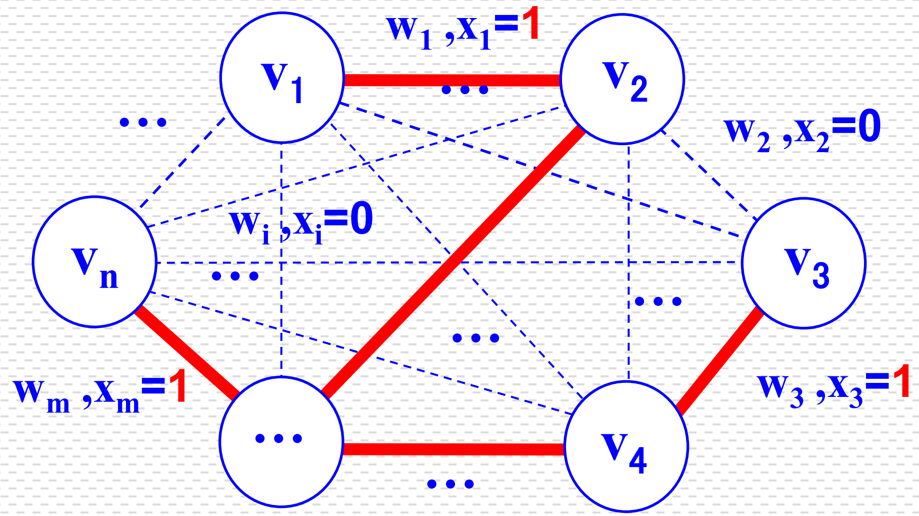
模型描述

- **数学表示为:**

$$\min \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in T$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$



where

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{if edge } e_i \text{ is selected} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

T : the set of all spanning trees in graph G

w_i : the ith cost coefficient.

m : the number of edges

特点

- 一类网络问题
- 非线性问题
- 难以用简单的数学公式来描述
- 大多数问题是NP难问题
- 实际问题通常需要满足附加约束条件

应用

- 电力线网络最经济的布局
- 运输问题
- 通信网络设计
  - 例如，有线电视电缆架设
  - 许多研究工作表明，最小生成树结构是通信网络设计的最优拓扑。
- 管道铺设问题
  - 例如， 暖气管道铺设（节省材料、效益最大）
  - 矿井通风网路铺设（风阻最小）
- 城市高速公路问题
  - 修建哪几条公路能够实现所有城市的连通，同时满足所修公路总长最短（或费用最低）。
- 分布式系统设计
- ……

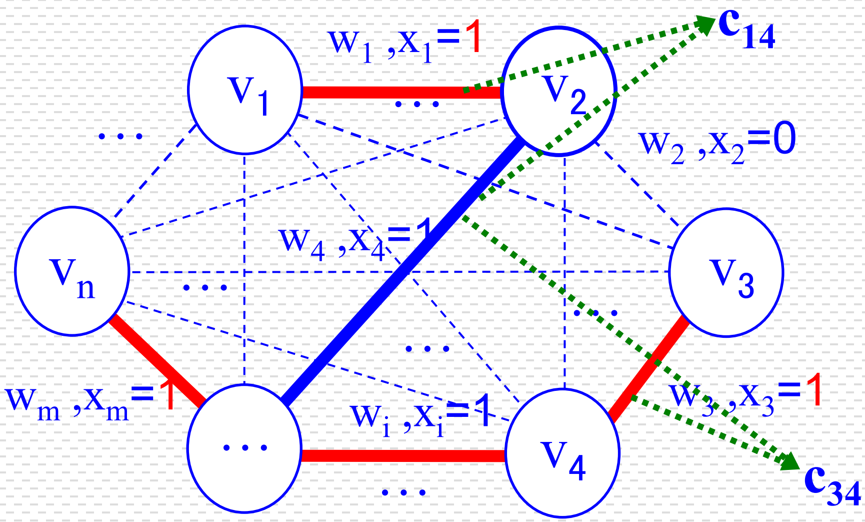
约束最小生成树问题 (constrained MST problem)

- 生成树在大多数网络设计和分析问题中扮演重要角色。
- 然而，实际的网络优化问题通常需要满足附加的约束。
- 因此形成了约束 MST 问题

作　　者	问　　题
Bertsimas (1990)	概率最小生成树问题
Fernandes 和 Gouveia (1998)	叶约束最小生成树问题
Ishii, Shiode 和 Nishida (1981)	随机最小生成树问题
Kershenbaum (1974)	容量限制的最小生成树问题
Narula 和 Ho (1980)	度约束的最小生成树问题
Xu (1984)	二次最小生成树问题
Zhou and Gen (1996)	多判据最小生成树问题

二次最小生成树问题 (quadratic MST problem)

- 二次最小生成树考虑两种类型的费用：
  - 直接费用 (direct cost)：与每边相关的费用
  - 交互费用 (interactive cost)：用来描述同时将一对边选入树时产生的费用
- 数学描述



$$\min\ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^{m} c_{ik} x_i x_k$$

$$\text{s. t. } \boldsymbol{x} \in T$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,\ldots,m$$

where

c_{ik} denote the interactive cost due to a pair of edges (e_i, e_k).

- 由于考虑了交互费用，目标函数不再线性。

度约束最小生成树问题（degree-constrained MST problem）

- 在 MST 问题中，假设存在每个顶点的度约束，即对于每个顶点 v_j，其度值 y_j 不能超过给定的数值 d_j，则连接到每个顶点的边的数量受到了限制。问题成为度约束的 MST 问题
- 数学描述：

$$\min \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i$$

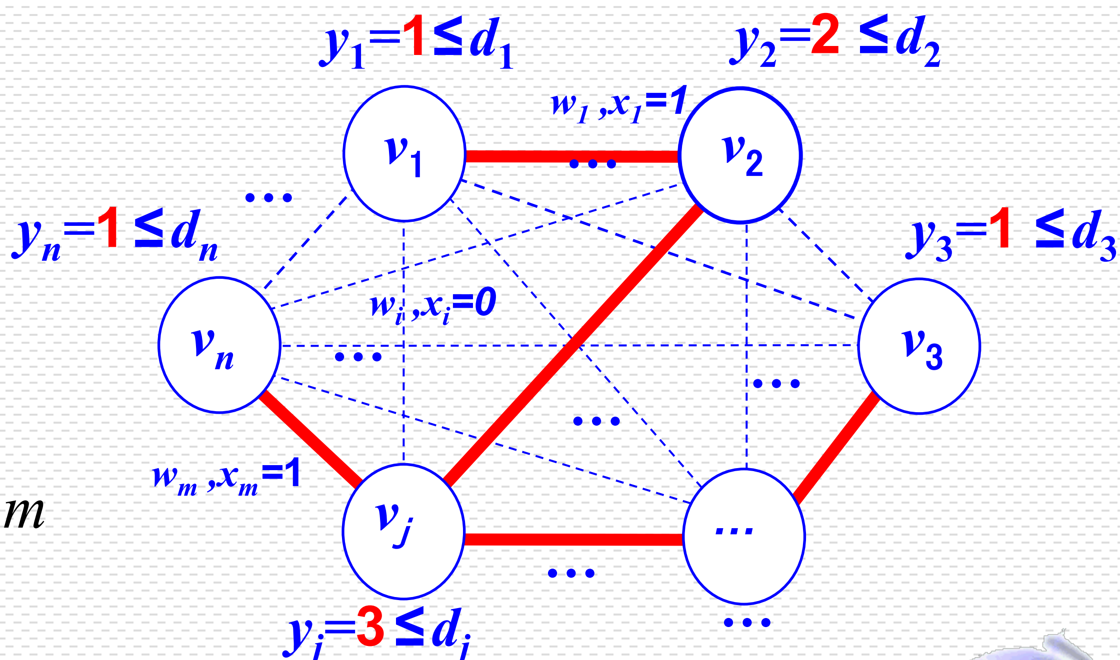
$$\text{s. t.} \quad x \in T$$

$$y_j \le d_j, \; j \in V$$

$$x_i \in \{0,1\}, \; i = 1,2,\dots,m$$

$$y_j \in I, \quad j \in V$$

where I is a set of integer number



一般的求解方法

- 分支定界法
- 快速启发式算法
  - 人们对最小生成树问题进行了大量的研究，产生了许多快速算法。这些算法可以在近似线性时间复杂度内进行求解。
  - 贪心算法（**PRIM**）

求解最小生成树的Prim算法

基本思想：假设有一个**无向带权图G=(V,E)**，最小生成树为**MinTree=(V,T)**，其中V为顶点集合，T为边的集合。

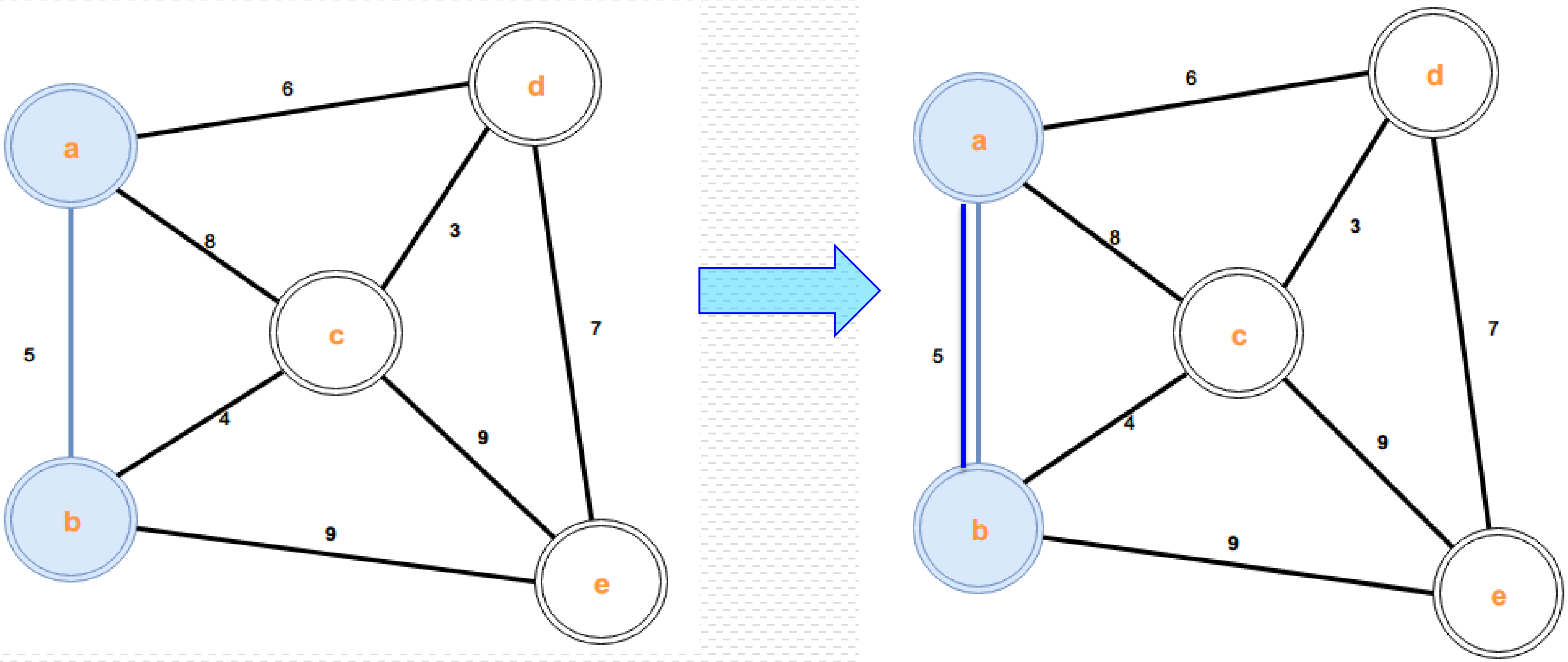
求边的集合T的步骤如下：

- 令 U={u0}，T={}。其中U为最小生成树的顶点集合，开始时U中**只含有顶点u0（u0可以为集合V中任意一项）**，即从u0出发，构造最小生成树。
- 对所有u∈U，v∈(V–U)（其中u, v表示顶点）的边(u,v)中，**找一条权值最小的边(u',v')**，将这条边加入到集合T中，将顶点v'加入集合U中。
- 直到将V中所有顶点加入U中，则算法结束，否则一直重复以上两步。

用**大写字母**表示集合，用**小写字母**表示顶点元素，**用<>表示两点之间的边**。

求解最小生成树的Prim算法

STEP 1： 初始状态：**U={a} V={b,c,d,e } T={}**

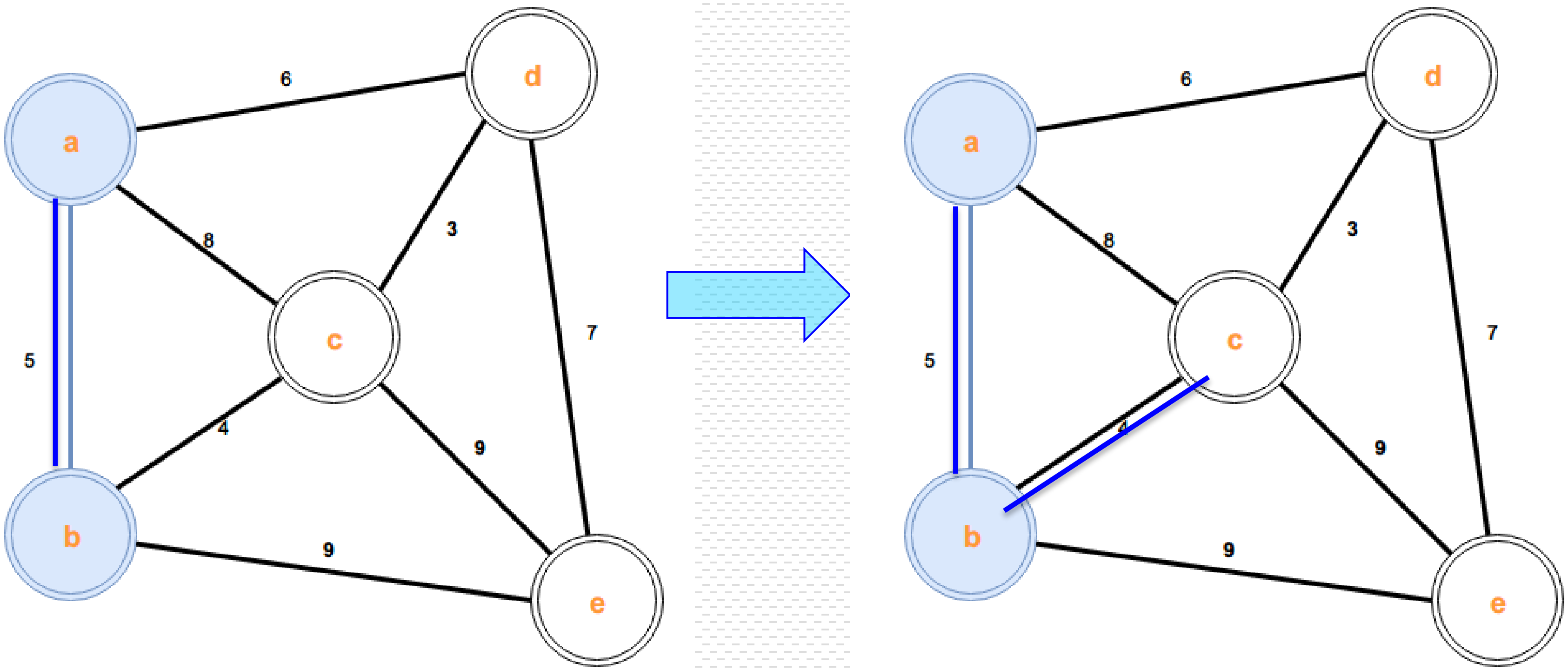


STEP 2：集合U和V相关联的**权值最小的边是<a,b>**，将b加入U。
U={a,b}，V={d,c,e }，T={<a,b>}

求解最小生成树的Prim算法

STEP 3 集合U和V相关联的**权值最小的边是<b,c>**，将c加入U。

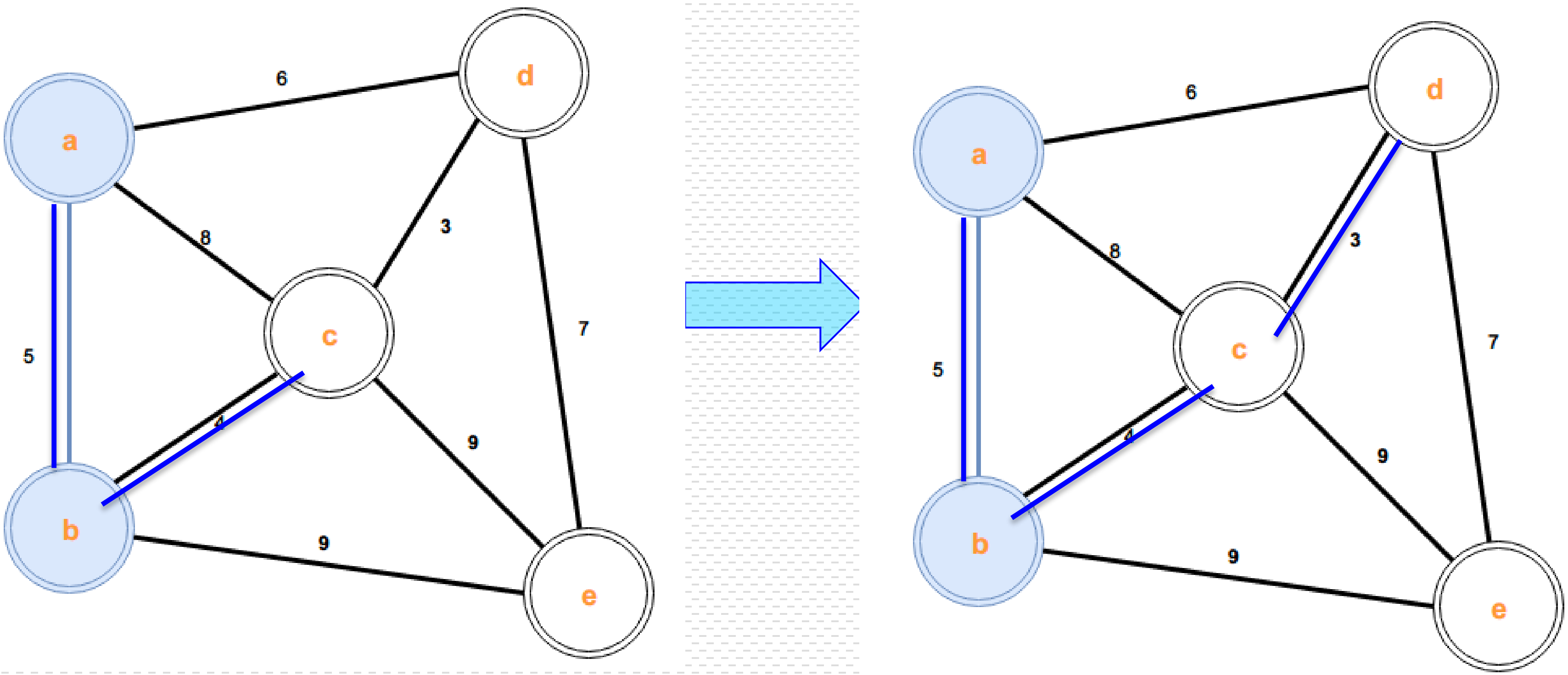
U={a,b,c} ， V={d,e }， T={<a,b>, <b,c>}



求解最小生成树的Prim算法

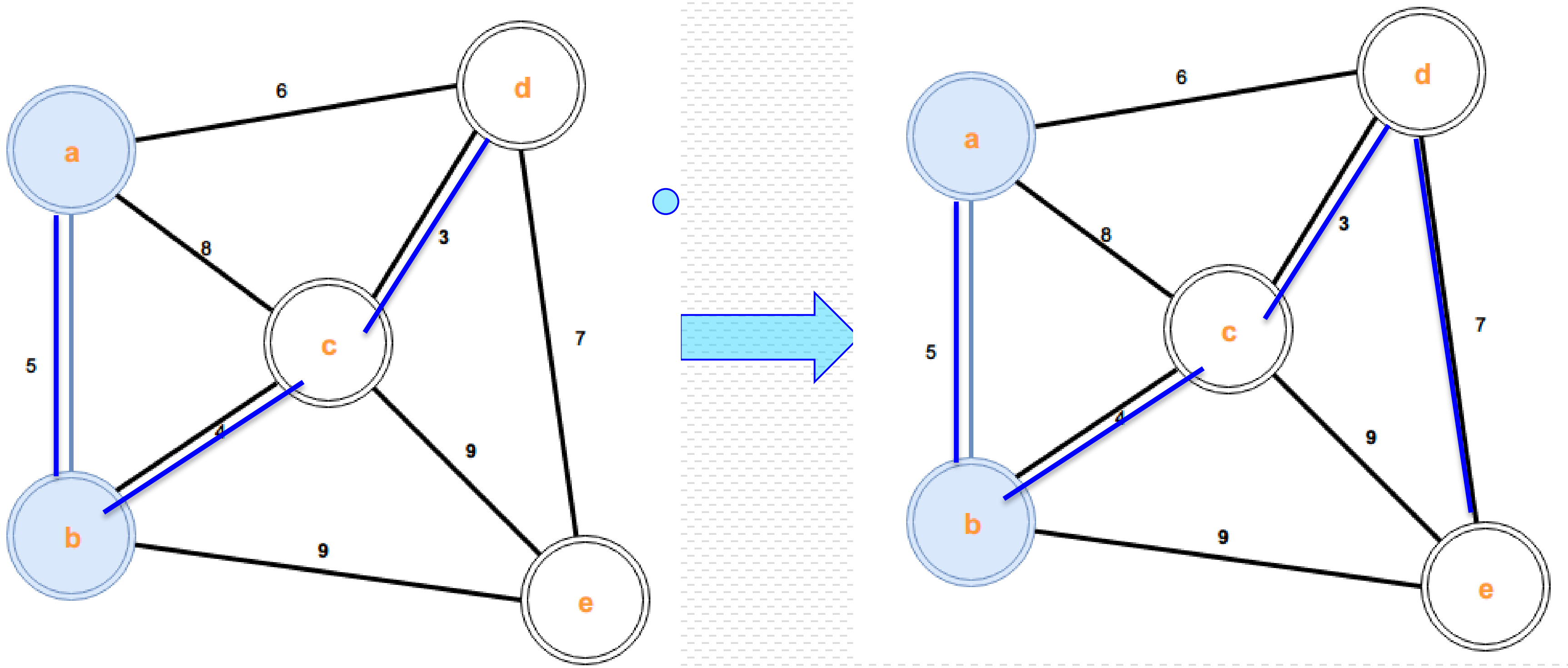
STEP 4：集合U和V中相关联的**权值最小的边是<c,d>**，将d加入U。

U={a,b,c,d}，V={e }，T={<a,b>, <b,c>,<c,d>}



求解最小生成树的Prim算法

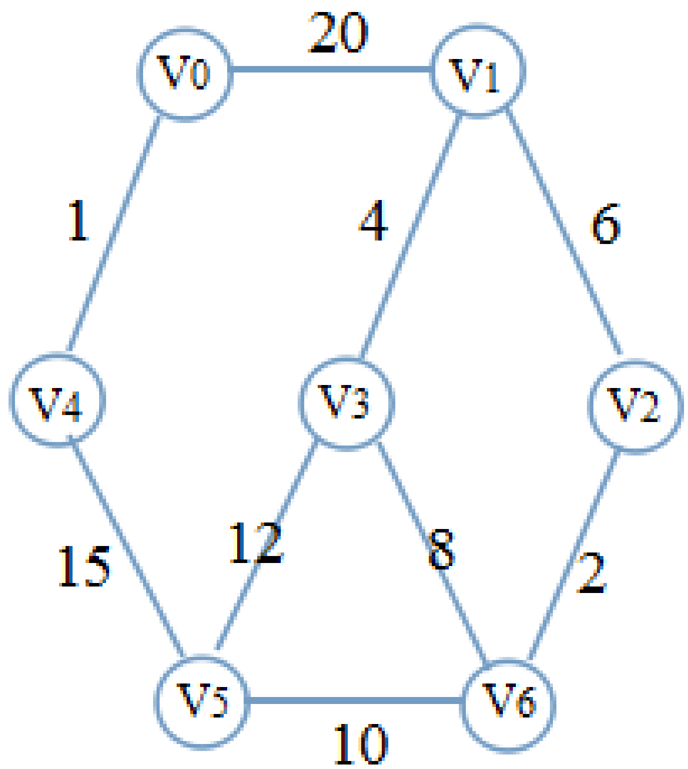
STEP 4：最后集合U和V中相关联的**权值最小的边是<d,e>**，于是将e加入U。**U={a,b,c,d,e}，V={}，T={<a,b>, <b,c>,<c,d>,<d,e>}**



算法代码如何编写？

求解MST问题的Kruskal算法

Kruskal算法的思路：每次都从剩余边中选取权值最小的，当然，这条边不能使已有的边产生回路。



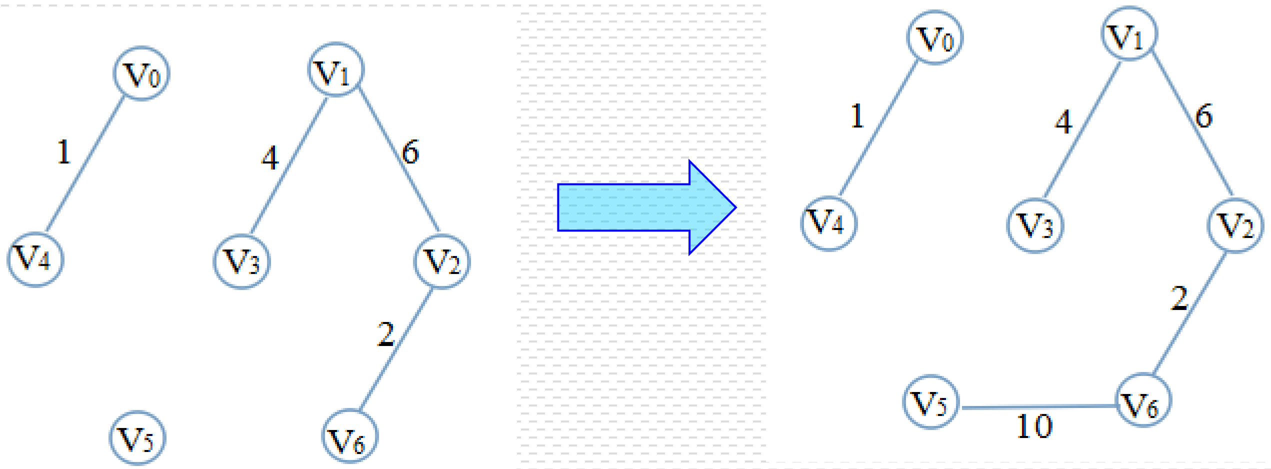
求解MST问题的Kruskal算法

STEP1：先对边的权值排个序：

1(V0,V4)、2(V2,V6)、4(V1,V3)、6(V1,V2)、8(V3,V6)、10(V5,V6)、12(V3,V5)、15(V4,V5)、20(V0,V1)

Step2:首选边**1(V0,V4)、2(V2,V6)、4(V1,V3)、6(V1,V2);**

Step3:若**选取边8(V3,V6)则会出现环**，则必须抛弃8(V3,V6)，选择下一条10(V5,V6)没有问题。。。。。



代码如何实现？

End