第 2 章 最优化基础

最优化是运筹学的核心方法论，贯穿于后续所有章节（如背包问题、选址问题、车间调度问题等）。本章旨在引导读者从实际问题出发，从现实问题中抽象出数学模型，认识最优化方法在管理科学与工程中的作用，掌握最优化思想。本章将系统介绍最优化问题的建模、分类及计算复杂性，为后续章节奠定理论基础。

2.1 最优化简介

2.1.1 最优化的起源与发展

最优化（Optimization）是人类探索世界和解决问题的核心方法。从认识世界到改造世界，这一过程可以简化为两个关键步骤：建模与优化。首先通过观察、分析和抽象建立对客观事物的认知模型（认识世界），进而通过优化方法将理论模型转化为可执行的解决方案（改造世界）。例如，科学家通过观察自然现象建立物理模型（如牛顿定律），工程师则基于这些模型设计出更高效的机械结构（如飞机机翼的流体力学优化）。

这一过程在各学科领域均有深刻体现。自然科学通过建立物理定律的数学模型揭示世界规律，工程学通过结构模型优化机械设计，经济学通过博弈模型分析市场行为，计算机科学则通过算法优化提升智能系统的性能。模型的发展遵循从抽象到具体的路径：最初是定性描述的概念模型（如哲学理论），逐步演化为用图形表示要素关系的结构模型（如地铁线路图），再升级为用数学方程精准量化的数学模型（如预测经济走势的统计模型），最终发展为结合人工智能的智能模型（如自动驾驶的决策算法）。这一递进过程体现了人类认知从抽象到具体、从理论到实践的深化，而最优化始终是贯穿其中的关键纽带，推动着理论创新向实际应用的转化。

最优化理论的发展历经多个阶段。早期极值理论（如微积分中的最大值、最小值问题）为优化奠定了数学基础。20 世纪中期，运筹学因二战时期的军事需求兴起，帮助军队规划物资运输路线，战后扩展到工厂生产调度和商业管理。随着计算机技术的进步，数学规划成为优化问题的“工具箱”：线性规划像“数学计

算器”一样，帮助企业分配资源、控制成本；非线性规划能处理更复杂的场景，比如设计风力发电机叶片的最优形状；动态规划则像“分步骤解题指南”，用于规划物流配送的最短路径；马尔可夫决策过程可以应对随机变化的问题，比如预测股市波动并制定投资策略。此外，排队论优化医院挂号系统以减少等待时间，存储论帮助超市合理进货以避免缺货或积压，这些理论共同构建了解决实际问题的完整框架。

2.1.2 最优化在管理科学中的应用

在国民经济中，优化理论的应用无处不在。日常生活中，导航软件通过动态规划为你推荐最快路线；电商平台用线性规划调度仓库库存；银行利用随机规划评估贷款风险。在更宏观的层面，政府用博弈论设计环保政策，通过优化算法分配公共资源（如疫苗接种优先顺序）。近年来，大数据与人工智能的结合让优化更“智能”——例如，外卖平台通过强化学习实时调整骑手配送路线，智慧城市利用 MDP 模型动态调控红绿灯缓解拥堵。这些技术不仅让社会运行更高效，还在应对气候变化、疫情防控等全球性问题中发挥关键作用。可以说，优化既是连接理论与现实的桥梁，也是推动人类从“发现问题”走向“解决问题”的核心动力。

在实际管理中，最优化方法被广泛应用于资源分配、生产调度、运输规划、库存控制等领域。例如：

- 资源分配：通过线性规划或混合整数规划实现生产资源的合理分配。如第 5 章背包问题（资源约束下的价值最大化）。
- 选址决策：运用网络流模型或双层规划平衡设施建设成本与服务辐射范围，如第 9 章选址问题（最大化市场份额覆盖）。
- 物流调度：通过动态规划或整数规划模型优化多节点配送路径，结合时空约束实现成本控制。如第 11 章车辆路径问题（最小化运输费用）。
- 生产调度：采用混合整数规划或禁忌搜索算法协调多工序生产节奏，如第 12 章车间调度问题（最小化完工时间）。

这些应用展示了最优化理论如何帮助决策者在有限资源和多重约束条件下做出科学合理的决策。

2.2 系统建模与建模流程

2.2.1 数学模型的概念

模型作为建模活动的产物，既是对客观系统的映射工具，也是开展系统分析的载体。模型是现实世界或问题的简化表达形式，通过符号、图表、数学方程或物理实体呈现。广义上，模型可以根据表现形式划分为三类：物理模型、概念模型和数学模型。其中，数学模型是通过数学语言（如方程、函数、图表）描述系统行为与规律的工具，广泛应用于自然科学、工程技术和社会科学领域。其核心是通过抽象与量化，将复杂现实问题转化为可分析、可计算的形式。数学模型可从多个维度进行分类，常见的维度包括：变量性质、变量取值类型、变量关系、时间维度等。

按变量性质分类，数学模型可分为确定性模型和随机模型。确定性模型中变量关系完全由已知规律决定，无随机因素。随机模型包含概率或随机变量，反映不确定性。随机模型又可分为模糊模型和灰色模型。模糊模型处理边界不清晰或主观判断的问题，使用模糊集合理论。灰色模型适用于“部分信息已知，部分未知”的系统，通过少量数据预测趋势。

按变量取值类型分类，数学模型分为连续模型和离散模型。连续模型指变量随时间或空间连续变化，用微分方程描述。离散模型指变量在离散点变化，如整数或事件驱动。

按变量关系分类，数学模型分为线性模型与非线性模型。线性模型的变量间呈比例关系，图像为直线或平面。非线性模型的变量间关系复杂，含平方、指数或交互项。

按时间维度分类，数学模型可分为动态模型与静态模型。动态模型考虑时间变化，描述系统状态演变。静态模型分析系统在某一时刻的平衡状态。

2.2.2 建模的步骤

系统建模是认识复杂系统的结构化方法，是通过类比、模拟或抽象等方法，为研究对象构建模型的过程。这一过程的核心目的是理解系统行为并实现总体最

优化，通过抽象化手段提炼出系统的本质特征和运行规律。总之，系统建模是将现实问题转化为可分析、可计算模型的核心过程，主要步骤包括：

（1）问题定义与目标明确：明确优化目标（如利润最大化、成本最小化），确定约束条件（如资源限制、时间限制）。

（2）变量选择与量化：确定关键决策变量（如生产量、路径选择），决策变量需覆盖所有可控因素，注意区分连续变量（如生产量）与离散变量（如 0-1 变量）。

（3）模型构建：选择数学形式（线性规划、动态规划等），目标函数一般为线性或非线性表达式，约束条件一般为线性不等式或等式。

（4）模型求解与验证：通过算法或软件求解并验证模型合理性，求解方法包括精确算法和智能优化算法。

（5）结果分析与实施：进行相关敏感性分析与模型迭代优化。

2.3 最优化问题的描述与分类

2.3.1 最优化问题的三要素

最优化所研究的问题是在众多的可行方案中怎样选择最合理的一种以达到最优目标。最优化问题的本质是：在有限的条件下，找到最佳决策方案。想象你要从宿舍到教室上课，可以选择不同的路线——最近的路可能拥挤，绕远的路虽畅通却耗时。你需要权衡时间、距离和人流，选择最适合自己的路径，这个过程就是一个典型的最优化问题。其中，路线选择就是该问题的决策变量、上课时间与道路状况称为约束条件、最短时间或最少步行就是目标函数。决策变量、约束条件与目标函数共同构成建立最优化问题数学模型的三要素。

决策变量（$\boldsymbol{x}$）：需要做选择的未知量，通过模型计算来确定的决策因素。例如，工厂生产计划中“生产 A 产品多少件、B 产品多少件”。

约束条件（$\boldsymbol{D}$）：决策必须满足的限制。例如，原材料有限、机器每天最多工作 8 小时。

目标函数（$f(x)$）：衡量决策好坏的标准，即系统追求的目标。通常是与决策变量有关的极值函数（最大值或最小值）。例如，生产成本最低、利润最大。

用数学语言描述，最优化问题的一般形式为：

$$\min f(x)\text{或}\max f(x) \quad (\text{最小化或最大化目标})$$

$$s.t.\ x \in D \quad （\text{满足约束条件}）$$

其中，$x \in R^n$是决策变量，$f(x)$为目标函数，$D \subset R^n$为约束集或可行集。所谓的优化问题，就是在一些限制条件下（D），从多种可行解中，确定使目标函数$f(x)$达到最小（或最大）时，决策变量x的取值（最优解）问题。

举个具体例子：假设你想用 80 元预算购买文具，笔记本每本 5 元，笔每支 2 元。决策变量是买多少本笔记本（x_1）和多少支笔（x_2）；约束条件是总花费不超过 80 元（$5x_1 + 2x_2 \leq 80$），且数量不能为负（$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$）；目标函数可能是最大化学习用品数量（$f(x) = x_1 + x_2$）。此时，最优化问题就是找到满足预算的购买组合，使总数最多。

优化问题渗透在生活的方方面面，企业用线性规划制定生产计划，物流公司用动态规划优化配送路线，甚至手机电量管理也涉及如何在有限能耗下延长续航时间。无论是设计火箭燃料配比，还是安排每日作息，本质上都是在“带着镣铐跳舞”——通过科学方法，在约束中找到最优解。

例题 2.1 现有一个农场，计划种棉花、水稻和蔬菜三种农作物。种植这三种农作物每亩地分别需要劳动力$1/3$、$1/2$与$1/4$个单位，预计每亩产值分别为75元、105 元和 66 元。该农场共有 60 亩土地和 22 个劳动力，在有限的土地和劳动力资源下，如何分配种植面积才能使农场获得最大经济效益？

解 分别从收益最大和成本最小的角度分析该问题。

分析 1：产值最大化模型

以取得最高的产值的方式达到收益最大的目标。

（1）决策变量

设：种植棉花的面积为x_1亩，种植水稻的面积为x_2亩，种植蔬菜的面积为x_3亩。

（2）目标函数

最大化总产值：$\max f = 75x_1 + 105x_2 + 66x_3$.

（3）约束条件

土地总量限制：$x_1 + x_2 + x_3 \leq 60$，

劳动力总量限制：$1/3x_1 + 1/2x_2 + 1/4x_3 \leq 22$,

非负约束：$x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

分析 2：成本最小化模型（对偶问题）

以最经济的投入达到收益最大的目标。从经济学角度，农场也可以选择直接出售土地和劳动力，而不是种植作物。此时需要确保出售资源的收益不低于种植作物的收益。

（1）决策变量

设土地的单位成本价格为y_1元/亩，劳动力的单位成本价格y_2元/个

（2）目标函数

最小化总成本：$\min g = 60y_1 + 22y_2$.

（3）约束条件

为了确保出售资源的收益不低于种植作物的收益：

种植棉花的收益约束：$y_1 + 1/3y_2 \geq 75$,

种植水稻的收益约束：$y_1 + 1/2y_2 \geq 105$,

种植蔬菜的收益约束：$y_1 + 1/4y_2 \geq 66$,

非负约束：$y_1, y_2 \geq 0$.

例题 2.2 某钢材加工厂接到一批订单，需要生产 80 套短钢材组件，每套组

件包含以下三种规格的钢材各一根：钢材 A（3.1 米）、钢材 B（2.3 米）、钢材 C（1.7 米）。工厂现有的原材料是长度为 7.9 米的长钢材。为了完成订单，工厂需要将这些 7.9 米的钢材切割成所需的 3.1 米、2.3 米和 1.7 米的短钢材。最少使用多少根 7.9 米的钢材才能满足 80 套短钢材的需求？在满足需求的前提下，如何切割才能使剩余的边角料（余料）最少，从而最节省材料？

解 为了合理利用钢材，工厂需要考虑所有可能的切割方式，并计算每种切割方式产生的余料（即无法利用的剩余部分）。以下是所有可行的切割方案及其余料计算：

第 1 种：$7.9-(3.1\times 2+1.7)=0$;

第 2 种：$7.9-(3.1+2.3\times 2)=0.2$;

第 3 种：$7.9-(3.1+2.3+1.7)=0.8$;

第 4 种：$7.9-(3.1+1.7\times 2)=1.4$;

第 5 种：$7.9-(2.3\times 3)=1$;

第 6 种：$7.9-(2.3\times 2+1.7)=1.6$;

第 7 种：$7.9-(2.3+1.7\times 3)=0.5$;

第 8 种：$7.9-(1.7\times 4)=1.1$.

模型建立如下所示：

决策变量：按第i种切割方案截x_i根钢材;

目标函数：最小化总余料

$\min f=0.2x_2+0.8x_3+1.4x_4+x_5+1.6x_6+0.5x_7+1.1x_8$;

约束条件:

钢材 A 需求：$2x_1+x_2+x_3+x_4\geq 80$,

钢材 B 需求：$2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7\geq 80$,

钢材 C 需求：$x_1+x_3+2x_4+x_6+3x_7+4x_8\geq 80$，$x_i\geq 0$，$i=1,\dots,8$.

优化问题的实际应用远比我们想象的更贴近生活。从经典的数学难题到日常决策，处处体现着“在约束中寻找最优解”的核心思想。例如，背包问题要求在一定容量限制下选择价值最高的物品组合，这与旅行时如何用有限行李箱装下最需要的衣物本质相同；旅行商问题寻找最短路线遍历多个城市，正是导航软件规划自驾游路径的数学基础；而装箱问题如何用最少的箱子装下所有货物，直接应用于物流公司的仓储管理。在工业与科技领域，优化方法更是大显身手：最小生成树帮助设计成本最低的通信网络；图着色问题为课程表安排或电路板布线提供避免冲突的方案；设备布局问题优化工厂生产线，减少物料搬运时间；机器调度问题则像“时间管理大师”，协调多台机器的任务顺序以提升效率。即便是看似抽象的问题，如二次指派问题或聚类问题，也在芯片设计、社交网络分析等领域发挥关键作用。日常生活中，优化思维无处不在。购物决策：用有限预算挑选最喜欢的衣服时，你已经在解决“多目标优化问题”——既要满足审美需求，又要考虑价格和未来使用频率；交通出行：选择“时间短、费用低、风景好”的路线，本质是平衡多个目标的多目标优化；人生规划：筹备婚礼时协调预算、场地和宾客名单，买房装修时权衡空间、成本和风格偏好，甚至安排每日学习计划，都是在处理带有模糊条件和不确定性的模糊优化问题。

这些例子揭示了一个深刻事实：优化不仅是数学公式的推导，更是人类智慧的体现。它教会我们在资源有限的世界里，如何通过科学方法将复杂问题拆解为决策变量、约束条件和目标函数的组合，最终找到那个“虽不完美，但最合适”的答案。

例题 2.3 需要在区间$x \in [3,14]$内找到使以下目标函数最小的x值：

$$\min f(x) = 10 + 5\,sin(x) + \log_{10}(10x + 11)\cos(3 + x/2)$$

解 这里，决策变量是x，需要在区间[3,14]内找到一个x的数值；约束条件限定了x的取值范围；目标函数$f(x)$则是一个复杂的数学表达式，包含三角函数和对数函数的组合。这种组合可能导致函数图像呈现多个波峰波谷（即多极值点），形成“多峰问题”——就像在一片连绵起伏的山丘中寻找最低点，既有多个小山谷（局部最优解），也可能存在一个最深的谷底（全局最优解）。

例如，当$x = 5$时，可能得到一个局部最小值$f(5)$，但这不一定是全局最优

解。真正的最优解$\hat{x}$需要在整个区间内搜索，确保没有遗漏更小的值。解决这类问题需要特殊的优化方法：传统梯度下降法可能因“地形崎岖”陷入局部最优，而遗传算法或模拟退火算法等全局优化方法则能跳出局部陷阱，更有可能找到全局最优解。

这类问题在工程和科研中十分常见。例如，设计无人机飞行路径时，目标函数可能涉及空气阻力、能耗和飞行时间的综合计算，其数学形式同样复杂且多峰。通过优化算法，工程师可以在成千上万种可能中筛选出最佳方案，既满足物理限制（如电池容量），又实现性能最优。简而言之，函数优化不仅是数学游戏，更是解决实际问题的钥匙——它教会我们如何在复杂系统中，科学地逼近“最佳答案”。

2.3.2 最优化问题的五部分

前文介绍过优化问题的三要素：目标函数、决策变量和约束条件。严格上来讲。最优化问题的基本结构可以分解为五个核心组成部分：

定义域（D）：这是所有可能解的集合，即决策变量（或者说待选对象）的取值范围。例如，设计一款新型手机时，电池容量可能被限制在 2000mAh 到 5000mAh 之间（$x \in [2000,5000]$），这一范围即为定义域。一个优化问题的决策变量通常包含很多，变量的性质有的是连续的，有的是离散的；变量的范围有的是有限的，有的是无限的。

约束条件（C）：限制解的可行性的规则。比如制造手机时，成本不能超过预算（材料成本+人工成本≤1000），同时机身厚度需小于 8 毫米。这些硬性要求将排除不符合条件的方案。通常的优化问题都是有约束的，有的是无约束的；约束条件所构成的多面体可能是凸的，可能是凹的；约束条件的表达式可能是线性的，可能是非线性的。

评价机制（M）：衡量解优劣的函数或方法。例如，手机设计可能追求“性能最大化”或“能耗最小化”，具体公式需根据问题定制。一般的优化问题通过表达式进行评价、也可以通过数据库检索、仿真的执行、基于试验的验证等，对那些满足约束的决策变量进行评价。目标函数是最常见的评价机制。

评价值（E）：评价机制计算出的具体数值，反映某个解的质量。若某款手机方案的成本为 800 元、性能评分为 90 分，其评价值可能是$f(x) = 90 - 0.1 \times 800 = 10$，数值越高代表综合表现越好。评价值与决策变量之间可能是线性关系，可能是非线性关系；决策变量可能是连续的，可能是非连续的；其评价值也可以是定量的，可以是定性的。

最优性准则（G）：确定“最优解”的标准。通常是最小化或最大化评价值。例如选择$f(x)$最大的手机设计方案。但在复杂场景中，可能需要平衡多个目标（如同时要求高性能、低成本和长续航），此时需定义多目标优化准则。

例题 2.4 在一个城市区域中，某外卖骑手需从起点（如商家所在地）依次将多个订单送达不同地点。骑手可选择不同的路线完成这些配送任务。每条路线由若干道路组成，可能经过多个路口、交叉点或中途站点。目标是：在满足所有约束条件的前提下，选择一个最优路径，使得综合评价指标达到最小值。

解 根据以上五个核心组成部分分析该外卖配送路线优化问题。

定义域：骑手可选的路径集合X，其中每条路径$x \in X$是一个从起点到终点的可行路径序列，且避开施工路段、限行区域等不可通行区域。

约束条件：每单配送时间不得超过 30 分钟；骑手出发时电动车电量有限，路径总长度不能超过电池续航能力（例如最大支持 20 公里）等。

评价机制（目标函数）：目标函数$f(x) = \text{总时间} + 0.5 \times \text{总距离}$。其中，时间与距离的权重反映优先级，时间权重为$1$，距离权重为$0.5$，表示系统更重视时间效率，但同时也希望尽量减少行驶距离以节省能耗。

评价值：其中，时间权重为 1，距离权重为0.5，表示系统更重视时间效率，但同时也希望尽量减少行驶距离以节省能耗，则其综合评价值为$f(x) = 25 + 0.5 \times 5 = 27.5$；

最优性准则：在所有满足约束条件的可行路径中，选择评价值$f(x)$最小的路径作为最优解。

这五个部分像齿轮般紧密啮合：定义域划定战场，约束条件排除干扰，评价

机制量化目标，评价值提供比较依据，最优性准则最终锁定胜者。无论是设计产品、规划交通，还是安排日程，这一结构都在默默支撑着高效决策，教会我们如何在复杂世界中科学地“做选择”。

2.3.3 最优化问题的分类

最优化问题的类型丰富多样。优化问题基本结构的5个部分的不同组合，就构成不同的优化问题，这可算是一种优化问题的分类方法。通过调整这些要素，可以构建出适用于不同场景的优化模型。以下是几种典型优化问题的分类与实例解析：

（1）线性规划（Linear Programming）

组合特征：D：实数（如工厂生产量可以是任意非负实数）；C：线性不等式（如“原料消耗总量≤库存量”）；M：线性表达式（目标函数如利润$=5x_1+3x_2$）；E：线性标量；G：最大化或最小化。

实例：某工厂生产两种产品，需在有限原料下分配产量，使总利润最大。

应用：资源分配、成本控制、运输调度等。

（2）整数规划（Integer Programming）

组合特征：D：整数（如生产数量必须为整数）；C：线性不等式；M：线性表达式；E：线性标量；G：最大化或最小化。

变体：0-1整数规划：变量只能取0或1（如是否在某地建仓库）；混合整数规划：部分变量为整数，部分为实数（如生产整数台机器，但耗电量为实数）。

实例：物流公司需选择5个仓库位置（0-1变量），并分配运输车辆（整数变量），使总成本最低。

（3）非线性规划（Non-linear Programming）

组合特征：D：实数；C：可能包含非线性不等式（如“$x^2+y^2\leq 1$”）；M：非线性表达式（如目标函数含平方项或三角函数）；E：非线性标量；G：最大化或最小化。

子类：二次规划：目标函数为二次函数（如优化投资组合风险）。

实例：设计卫星轨道时，需最小化燃料消耗（目标函数含引力模型等非线性项）。

（4）变分问题（Variational Problem）

组合特征：D：函数（如曲线或曲面的形状）；C：边界条件或连续性要求（如桥梁两端固定）；M：泛函（函数的函数，如能量积分）；E：泛函值；G：最小化能量或时间。

实例：悬索桥的最优形状设计，需在满足承重条件下，使桥梁总应力最小。

（5）组合优化问题（Combinatorial Optimization）

组合特征：D：离散对象的组合（如路径、排列或子集）；C：逻辑条件（如“每个城市仅访问一次”）；M：组合表达式（如路径总长度）；E：标量；G：最大化或最小化。

经典问题：旅行商问题是指寻找访问所有城市的最短回路；背包问题是指在容量限制下选择价值最高的物品组合。

应用：物流路径规划、芯片电路布线、航班排班等。

这些优化类型并非孤立存在，而是相互关联：如，线性规划是整数规划的基础，后者通过添加整数约束解决离散决策问题；二次规划是非线性规划的特例，常用于金融与工程中的平衡优化；组合优化的许多问题（如旅行商问题）可通过转化为整数规划模型求解。无论是设计手机续航方案（非线性规划）、安排课程表（组合优化），还是规划城市交通（混合整数规划），优化方法都在帮助我们从海量可能性中筛选出“最佳妥协”。理解这些分类，如同掌握工具箱中的不同工具——面对具体问题时，选择合适的模型，才能高效地“在约束中寻找最优解”。

考虑问题的出发点不同，会得到不同的分类方法，现介绍普遍使用的一种分类方法。按系统动态性分类，分为静态系统优化和动态系统优化。静态系统优化指系统状态不随时间变化，一次性决策。动态系统优化指系统状态随时间或外部条件变化，需实时调整。如动态规划、控制理论等。静态系统优化按约束类型分

为无约束优化和有约束优化。无约束优化指决策变量无任何限制，直接在定义域内寻找最优解。有约束优化指决策变量受条件件限制（如资源、时间、物理规律）。有约束优化可以分为线性规划、非线性规划和组合优化。线性规划目标函数和约束条件均为线性表达式。非线性规划目标函数或约束条件含非线性项（如平方、三角函数）。组合最优化决策变量为离散对象的排列或组合。

其中无约束优化讨论在不受任何外部限制条件下寻找目标函数极值的问题，而约束优化则在一定等式和不等式约束条件下求解最优解。

无约束优化针对的是没有任何约束前提下的极大或极小化某个函数的问题。解决无约束问题的常用方法包括梯度下降法、牛顿法、全局优化算法（如遗传算法、模拟退火，通过随机搜索跳出局部最优）。

全局最优解难以求解的原因包括：解空间维度高：变量越多，搜索空间呈指数级增长；目标函数复杂性：非线性、非凸函数（如神经网络损失函数）存在大量局部最优；计算资源限制：穷举所有可能性耗时过长，需权衡精度与效率。应对策略包括：结合局部搜索与随机扰动；使用并行计算加速搜索；对问题先验知识建模，缩小搜索范围等。

约束优化中，非线性规划是最优化领域中的重要分支，其核心目标是在存在等式或不等式约束的条件下，寻找目标函数的最小值或最大值。与线性规划不同，非线性规划允许目标函数或约束条件为非线性形式（如二次函数、三角函数等），这使得它能够描述更复杂的现实问题。因此，非线性规划对于工程、数学和运筹学的各个领域都是极其重要的工具。线性规划中目标函数和约束均为线性，图像为直线或平面；和线性规划不同，非线性规划允许更复杂的表达式，图像可能是曲线、曲面或多峰形态，使得求解过程中容易陷入局部最优。

求解非线性规划的方法多样：常用方法包括拉格朗日乘子法、KKT 条件、内点法、序列二次规划等。然而，传统方法在处理大规模或非凸问题时往往效率较低，需要结合数值方法或智能优化算法（如遗传算法）进行求解。实际应用中，非线性规划广泛应用于工程设计、经济决策、金融投资组合优化以及生产调度等领域。面对复杂的非线性关系，研究人员和工程师常常借助专用求解器（如 Gurobi、Cplex、Xpress 等）和现代计算平台来解决此类问题。在本书的后续章节，将会

介绍典型运筹学问题与求解方法，并介绍 Gurobi 求解器的使用。

2.4 最优化问题的计算复杂性

2.4.1 算法与计算复杂性基础

算法是解决特定问题的一系列明确步骤的集合。无论是排序数据、规划物流路径，还是优化生产计划，算法的核心目标是以有限的资源（如时间和内存）高效完成任务。例如，排序算法能将杂乱的数据按升序或降序排列，最短路径算法能在地图中找到两点间的最优路线。然而，并非所有问题都能通过算法解决。可计算性理论研究哪些问题是计算机可解的。例如停机问题（判断一个程序是否会终止）被证明是不可解的，即不存在通用算法能解决所有情况。相比之下，排序、最短路径等问题属于可解问题，因为存在明确的算法流程。可计算理论从建立一个恰当描述计算机工作原理的计算模型出发，精确定义什么是计算、什么是可计算，再进一步回答某个或某类问题是否可以用计算机求解。如果所给问题可以求解，则称该问题是可计算的或可解的；否则称为不可解。

计算复杂性理论进一步探讨解决问题所需的资源量，尤其是时间和内存。其核心目标是量化问题的“难易程度”。例如，某些问题看似简单，但随着输入规模扩大，所需计算资源可能呈爆炸式增长。这种复杂性分析帮助我们在实际应用中选择高效算法，避免因资源不足导致计算不可行。算法的计算复杂性主要考虑的是设计可以用于估计、定界任一算法求解某些类型的问题时所需要的和仅需的计算资源量的技术或方法。例如，物流公司面对数百个配送点时，若采用穷举法求解最短路径，计算时间会随配送点数量呈指数级增长，而智能优化算法能在合理时间内提供可行解。

智能优化算法是一种通过经验规则快速获取可行解的方法。它不保证找到全局最优解，但在大规模或复杂问题中具有显著优势。本书将详细介绍代表性的遗传算法，具体见第 3 章。

2.4.2 时间复杂性与空间复杂性

对于同一个问题，常常有多个不同的算法可以用来求解它，这就引出了一个问题：什么是求解该问题的一个“好”算法？广义地讲，一个算法的有效性可以通

过执行该算法时所需要的各种计算资源的量来度量。这些计算资源包括运行时间与内存空间。因此，算法的计算复杂性可以分为时间复杂性和空间复杂性。

时间复杂性衡量算法运行时间随输入规模增长的趋势，而空间复杂性关注算法运行所需的内存资源。在实践中，时间与空间往往需要权衡：一些算法通过牺牲内存换取速度，而另一些则通过增加计算步骤减少内存占用。

渐近分析是复杂性分析的核心工具。实际中，时间复杂性分析通过大O符号表示，相比于具体的时间值，我们更关心的是随着问题规模的增大，算法的计算复杂性是如何变化的，即以问题规模n为变量的计算复杂性函数$f(n)$的属性，忽略常数项和低阶项，仅关注增长趋势。例如，快速排序的平均时间复杂度为$O(nlogn)$，而冒泡排序为$O(n^2)$，当n趋近于无穷大时，前者的效率优势将愈发显著，因此更适合处理大规模数据。这种分析方法帮助工程师在面对大规模问题时，优先选择时间复杂度更优的算法。

2.4.3 多项式时间与指数时间算法

在计算机科学中存在这样一个一般的约定：仅当算法的时间复杂性函数随问题例子输入长度的增加而多项式地增长时，才认为这个算法是实用的、有效的。根据这种观点，则可以将算法分为两大类：多项式时间算法和指数时间算法。

多项式时间算法的时间复杂度为$O(n^k)$，其中k为常数。这类算法的计算时间随输入规模增长相对缓慢，适用于大规模问题。例如，线性规划中的单纯形法（尽管最坏情况下为指数时间，但实际中常表现为多项式时间）和最小生成树的 Kruskal 算法（$O(mlogm)$，m为边数）均属于此类。

指数时间算法的时间复杂度为$O(2^n)$或更高。这类算法在输入规模稍大时即面临“计算灾难”。例如，在旅行商问题中，给定n个城市及其间的距离，找到一条访问所有城市并返回起点的最短回路，穷举法解决该问题时，需遍历$(n-1)!$条路径（对称路径可以减少一半），时间复杂度为$O(n!)$，随n呈指数爆炸增长。当$n=20$时，计算量已远超现有计算机的算力。动态规划的某些变种虽然优化了部分场景，但时间复杂度仍为指数级（如$O(n^2 2^n)$）。

多项式时间算法是实际应用的基础，而指数时间算法只适用于小规模问题或

需要借助近似方法。例如，在旅行商问题中，可采用动态规划算法，时间复杂度$O(n^2 2^n)$，但当$n = 50$时，需要超算支持。因此，工程实践中多采用近似算法以平衡精度与效率。

2.4.4 问题复杂性的分类

根据计算复杂性理论，最优化问题可分为以下类别，详见图 2.1。

P 类问题指存在多项式时间算法的问题。例如，线性方程组求解（高斯消元法，时间复杂度为$O(n^3)$）。

NP 类问题是指解的验证可以在多项式时间内完成，但求解难度未知。例如，旅行商问题的任何一个候选路径都可以在多项式时间内验证是否是最短路径，但是找到最短路径尚无已知的多项式时间算法。

NP 完全问题（NP-Complete）是指 NP 类中最难的问题，如果任一 NP 完全问题存在多项式时间算法，那么所有 NP 问题都可以在多项式时间内求解。典型例子包括背包问题。

NP 难问题（NP-Hard）是指至少与 NP 完全问题同样困难，但未必属于 NP 类的问题。例如，多目标优化问题。

P 与 NP 的关系是计算机科学的核心未解之谜。若证明$P = NP$，那么所有 NP 问题均可高效求解，这将彻底变革密码学、人工智能等领域。但目前普遍认为$P \neq NP$，即 NP 完全问题本质上难以高效解决。

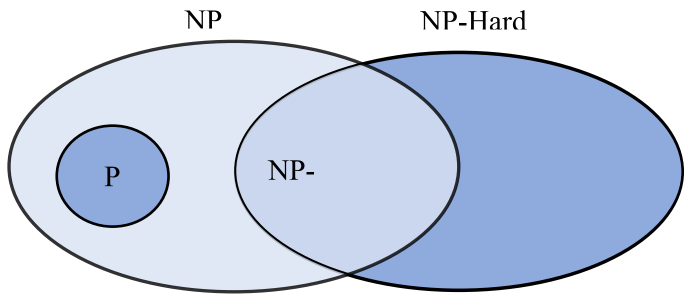

图 2.1 问题复杂性的分类

2.5 本章小结

本章系统阐述了最优化方法的核心思想与建模基础。作为运筹学的方法论基

石，最优化旨在引导从现实问题出发，通过抽象与量化建立数学模型，进而在众多可行方案中寻找最优决策。本章首先回顾了最优化的起源与发展，说明了其在管理、经济、工程等诸多领域扮演的关键角色，并介绍了从实际问题中提炼数学模型的一般流程与分类体系。

其次，本章重点剖析了最优化问题的核心结构。明确了构成问题的三要素——决策变量、约束条件与目标函数，并延伸阐述了其更精细的五部分描述：定义域、约束条件、评价机制、评价值与最优性准则。基于这些要素的不同组合，优化问题可被划分为线性规划、整数规划、非线性规划及组合优化等主要类型，每种类型对应着不同的现实场景与求解挑战。

此外，本章简要探讨了求解优化问题时所面临的计算复杂性问题，引入了算法时间与空间复杂性的基本概念，并区分了多项式时间与指数时间算法，这为理解各类问题的内在求解难度提供了理论视角。

综上所述，本章不仅构建了优化问题的基本概念与分类框架，更着重传递了一种在约束中寻求最优的系统性思维方式。这为后续深入探讨背包问题、选址问题、路径规划等具体运筹模型奠定了必要的理论基础。

研学互通

随着最优化理论与技术的迅速发展，越来越多的研究者开始将这些先进的方法应用到传统运筹学问题中，特别是在复杂和大规模的资源分配、路径规划等领域。线性和非线性规划不仅提供了一种系统化的方法来构建优化模型，还能在复杂环境中实现高效的决策支持。传统的最优化求解方法，如单纯形法、分支定界法等，通常适用于规模较小、结构明确的问题。然而，在面对动态、多维度、实时变化的优化问题时，传统算法往往难以满足计算效率和求解质量的需求。在这种背景下，现代最优化技术和计算方法为解决这些问题提供了新的视角和工具。

在许多实际场景中，最优化问题并不是静态不变的。例如，在物流配送系统中，货物的运输路径需要根据实时交通状况、需求变化、车辆位置等因素进行动态调整。这类问题难以通过传统的确定性算法高效求解，而现代智能优化算法提供了一个有效的框架。如京东、亚马逊等电商平台，通过智能优化算法，系统可

以在实时条件下自动调度配送车辆，以最小化总行驶里程并提高客户满意度。

为进一步探索最优化理论及其应用，以下推荐的经典文献和书籍涵盖了从基础理论到高级应用的各个方面。这些资源不仅适合希望深入理解优化算法的读者，也为学术研究与实际问题解决之间架起了桥梁。

(1) Bazaraa, M.S., Sherali,H.D., & Shetty,C.M.(2006). Nonlinear programming: theory and algorithms. John wiley&sons.

这本权威著作详细探讨了非线性规划的基本理论和各种求解方法。该书不仅详细介绍非线性规划的基础概念和理论，同时深入讲解了经典的求解算法，如约束优化中的拉格朗日乘子法和 KKT 条件。书中通过大量实例和习题帮助读者理解和掌握非线性规划的核心思想和技术，特别适合希望深入了解非线性最优化的学生和研究者。

(2) Luenberger, D.G., & Ye,Y.(2021). Linear and nonlinear programming. Springer Cham.

这本书是线性和非线性规划的经典教材之一，内容全面且深入。全书介绍了线性规划的基础理论和算法以及相关应用。接着，书中转向非线性规划，详细讨论了无约束优化和约束优化的各种算法。每一章都配有详细的数学推导和实例分析，帮助读者理解复杂的理论概念。该教材的最新第五版特别更新了数据科学和机器学习中的热门话题，如马尔可夫决策过程、分布鲁棒优化，涵盖了实用优化技术的核心概念，强调了最先进和流行的方法。章末练习提供了见解，以帮助更好应用这些方法。

(3) Papadimitriou, C. H., & Steiglitz,K.(1998). Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Courier Corporation.

这本书是组合优化领域的经典之作，详细探讨了组合优化的基本概念、算法及复杂性分析。书中首先介绍了优化问题的基本概念，包括单纯形法、对偶性，然后逐步深入到更复杂的组合优化问题。每一章都包含了详细的算法描述和复杂性分析，帮助读者理解这些问题的本质和解决方法。书中还阐述了问题复杂性的相关概念，对于理解计算复杂性的基本理论非常有帮助。特别适合对组合优化感

兴趣的读者，无论是理论研究还是实际应用都能从中获得深刻的见解。

这些文献不仅能够加深对最优化理论的理解，还可以帮助了解其在不同领域中的应用。通过阅读这些书籍，不仅能掌握必要的理论知识，还能获得解决实际问题的能力。无论是理论研究还是实践应用，这些资源都为读者提供了宝贵的指导和支持。

思行经世：智能时代的守护者（大数据与 AI 优化）

在我国当前的信息化建设中，如何利用有限的技术资源实现最优的社会效益，以便最大化科技进步对社会发展的促进作用，一直是政策制定者和科技工作者关注的重要问题。在大数据与人工智能时代，最优化算法作为经典的信息技术优化手段，其核心在于如何在海量数据中进行高效的选择和配置，这一思想在智慧城市建设和社会服务优化中得到了广泛应用，助力中国“互联网+”战略的实施。面对日益增长的数据量和复杂的社会需求，如何科学地应用这些算法，确保技术资源、人力和资金得到合理利用，以提升城市管理和居民生活质量，成为了推动社会发展的重要力量之一。

在智慧城市的构建背景下，最优化算法的应用主要体现在如何优化城市管理和服务的资源配置。假设每个城市有不同的管理需求，如交通流量控制、能源消耗管理、公共安全监控等，而技术和人力资源是有限的。如何通过最优化算法来分配这些资源，确保在有限的技术投入下，实现城市管理和服务效果的最大化，成为核心挑战。例如，在一些大城市中，通过对交通信号灯的时间动态调整和电力资源的最优分配，能够有效缓解交通拥堵并减少环境污染，同时提高市民的生活质量；基于线性或非线性规划模型进行电力资源的最优分配，有助于降低能耗和环境污染。

最优化算法的运用帮助城市管理提高了资源配置的效率，减少了不必要的浪费，并使有限的城市管理资源得到了最大化的利用。技术创新不仅提升了城市管理的精准度，还与社会责任紧密结合，为实现智慧城市的可持续发展目标贡献了积极力量。智慧城市建设不仅仅是对城市管理的直接改进，更是全社会共同推进城市现代化的重要途径。

通过智慧城市建设的案例，可以深入理解最优化算法在社会资源优化中的应用，认识到如何在有限资源条件下通过科学决策实现最大社会效益。应将科技创新与社会责任相结合，践行社会公平与和谐发展的理念，为城市发展做出贡献，推动社会的进步与和谐。最优化算法在智慧城市建设中的应用，不仅提升了资源的使用效率，减少了城市管理中的浪费，还为社会的可持续发展做出了贡献。

习题

习题 2.1 解释什么是线性规划和非线性规划，并各举一个例子说明。

习题 2.2 指出下列优化问题的决策变量、约束条件与目标函数。

$$\min w = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2, \dots 5 \end{cases}$$

习题 2.3 某工厂要生产甲、乙两种产品，已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗如表 2.1 所示。

该工厂每生产一件产品甲可以获利 2.5 元，每生产一件产品乙可以获利 3.0 元，问如何安排计划使该工厂获利最多？建立数学模型并指出该优化问题的三要素。

表 2.1 习题 2.5 中的生产产品所需设备台时及原材料消耗

	产品甲	产品乙	现有条件
设备	1.5 台时/件	2.0 台时/件	9.0 台时
原材料 A	3.0kg/件		20kg
原材料 B		2.5kg/件	18kg

习题 2.4 假设你是一个农场主，计划种植三种作物：小麦、玉米和大豆。每种作物需要不同的劳动力和土地资源，同时每种作物的收益也不同。请建立一个数学模型来决定如何分配你的土地和劳动力以最大化收益。

习题 2.5 考虑一家物流公司需要为其配送中心选址，目标是最小化总运输成

本。列出该问题中的决策变量、约束条件和目标函数。

习题 2.6 某厂家用原材料 A、B、C 加工成三种不同的产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ。已知三种产品中的原材料 A、B、C 的含量，原材料成本，各种原材料的每月限制用量，三种产品的产物加工费及售价如表 2.2 所示。问该厂家每月应当生产这三种产品各多少千克，使该厂获利最大？建立该问题的线性规划的数学模型。

表 2.2 习题 2.6 中的三种产品及原材料含量相关信息

原材料	I	II	III	原材料成本/（元/kg）	每月限制用量（kg）
A	55%	25%	80%	2.0	1400
B	45%	35%		2.5	2000
C		40%	20%	3.0	1300
加工费/（元/kg）	0.8	0.7	0.5		
售价/（元/kg）	4.5	5.0	4.0		