

# 经典运筹学问题与模型

(Models for Classical Operations Research  
Problems)

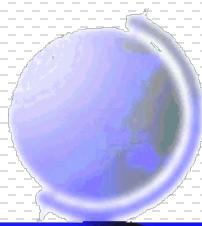
东北财经大学 管理科学与工程学院

Email: hanzhu@dufe.edu.cn



## 指派问题 (Quadratic Assignment Problem)

- 指派问题实例与特征
- 线性指派问题的描述
- 二次指派问题及特征
- 二次指派问题的求解算法



# 指派问题简单实例

## ● 产品检验问题

- 工厂生产10产品，需要10个工人检验产品的质量，不同的工人对不同产品熟悉程度，掌握程度不同，检验效果也不同，如何指派才能让效率最高，就属于这类指派问题。“工人”相当于资源，“产品检验”相当于工作。

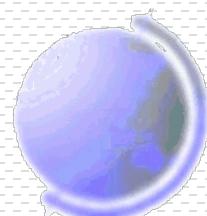
## ● 教师备课问题

- 4位老师要准备4门课程，不同的老师准备不同的课程所需的时间是不一样的，问题是如何指派，才能使总的准备时间最短。“老师”相当于资源，“准备课程”相当于“工作”

## ● 教学大楼装修问题

- 某所大学打算对三幢教学大楼进行维修，让三个建筑公司对每幢大楼的修理费用进行报价承包，不同的公司报价都不一样。假如必须把各教学大楼指派给不同的建筑公司，问题是如何指派，能使报价的总和最小。这里“建筑公司”相当于资源，“维修教学楼”相当于工作

● ○ ○ ○ ○ ○



# 指派问题的特征

- 假设工作对资源的需求是一对一的
- 每样资源唯一地指派给一件工作
  - 资源可以是：雇员、机器、时间段...
  - 工作可以是：任务、位置、事件...
- 当资源  $i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 指派给工作  $j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) 时，会产生一个相应的费用  $c_{ij}$ ，
- 问题是：
  - 如何指派可使总费用达到最小。
- 例如：
  - 产品检验问题、教师备课问题、教学楼装修问题

# 模型描述

- 指派问题的数学描述：

$$\min \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{资源 } i \text{ 指派给工作 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

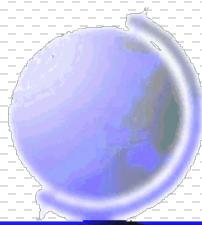
		工作			
		1	2	…	n
资源	1		1		
	2			1	
	…				
	n	1			

## 二次指派问题

- 在指派中引入一种新的费用
  - 指派相关费用
- 令  $a_{ijkl}$  为资源  $i$  指派给工作  $j$ , 且资源  $k$  指派给工作  $l$  时的费用, 则目标可以表述如下:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ijkl} x_{ij} x_{kl}$$

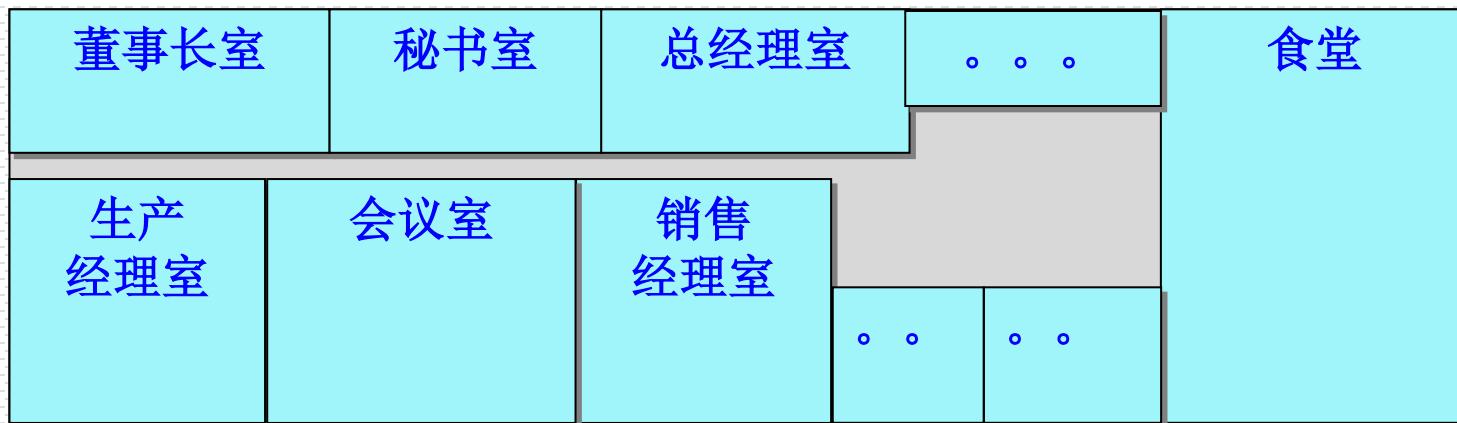
- 该问题是经典的组合优化问题,
- 由于目标函数的非线性, 不能用传统的整数规划方法进行求解。



# 简单实例

## ■ 办公室分配问题

- 一个公司搬入一层新的办公楼，问题是如何分配房间才能使所有人走动的距离最少？



- 可以把从办公楼大门到各房间的“走动距离\*人数”作为“指派费用”；
- 指派相关费用：科室之间的“走动距离\*人数\*走动频率”就相当于“指派相关费用”。

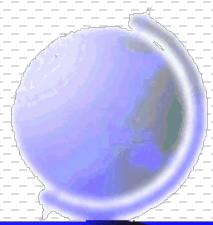
# 简单实例

- 二次分配问题的特征
  - 与费用相关的指派问题
  - 资源（工作）之间存在内在的相关性，用频率、权重、人数、。。。等表示
- 工作分配问题
- 设备布局（布置问题）

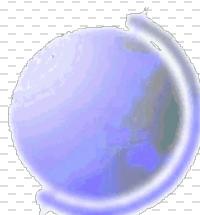


# 特点

- 一类特殊的线性规划问题（指派问题）
- 目标函数非线性（二次指派问题）
- NP 难的问题

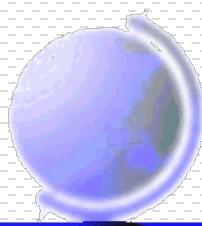


- 工作分配问题
  - 设备维修、企业人力资源配置、.....
- 设备布置问题
- 军事指派
  - 武器目标分配（炮兵火力任务分配）
  - 空战目标分配问题、...
- 仓储货位指派问题
- 机场停机位置指派问题
- 也可以看做是运输问题的一个特例，**区别在哪？**
- 计算机元件安排问题
  - 广为人知的采用Euclidean距离的二次指派问题是 36个位置34个元件的计算机元件安排问题，该问题最早由 Steinberg 提出。为把 34 个元件分配到4\*9个位置上，引入两个空元件。



# 一般的求解方法

- 自从Koopmans和Beckmann首先将设备布置问题建模为二次指派问题后，在OR文献里有许多作者提出了一批针对该问题的启发式算法或数值算法。
- 其中影响较大的有：
  - Hillier和Connors,
  - Burkard和Bonniger,
  - Bazaraa和Kirca,
  - Picone和Wilhelm,
  - Heragu和Kusiak,
  - 以及Kaku和Thompson。
- 著名的算法有：
  - 匈牙利算法。



- Tate 和 Smith 的研究

- 证明了遗传算法好于或等价于已有的启发式方法，且没有过多的辅助计算开销

- 编码：

- 例如：设备布置问题

- 假设可能的设备位置是平面上的矩形格子，位置之间的距离（与指派相关费用有关）可以用 Euclidean 范数或 Manhattan 范数计算。

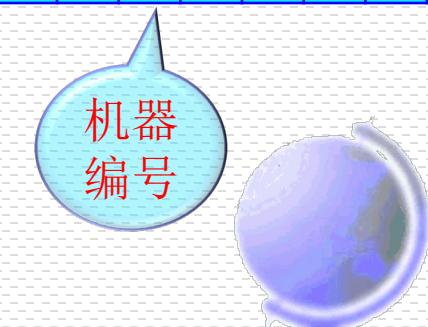
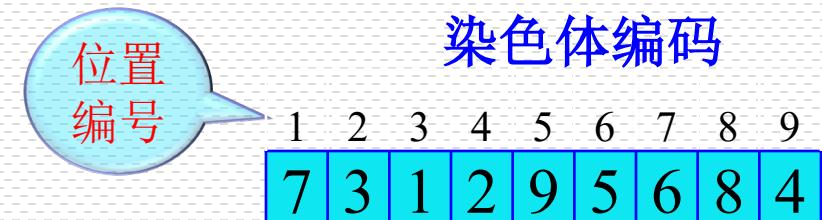
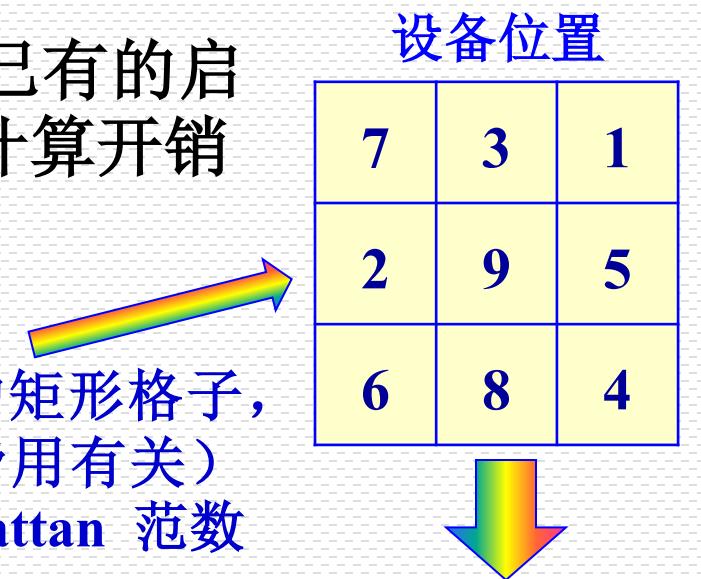
- 这些位置按行优先顺序编号

- 编码采用**顺序表达法**

- 如图，一个 9 个位置的问题：

- 每个正整数代表对应序号的设备，它在染色体中的序号代表该序号对应的位置。

- 任意位置的设备交换都得到可行的指派

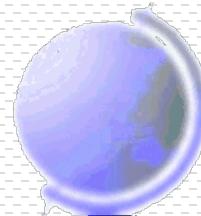


# GA求解

- 交叉过程：

- 任何在双亲中指派到相同位置的机器在后代中仍占据这个位置；
- 对于剩下的位置由双亲中指派到该位置的两台机器中随机选一台占据，从左到右进行；
- 将剩下的未指派的机器分派给尚空闲的位置。

双亲 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
双亲 2	5	4	3	1	6	9	7	8	2
共同位置									
随机选择	1	4	3	*	6	9	7	8	2
剩余									
完成的后代	1	4	3	5	6	9	7	8	2



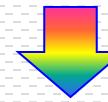
- 变异过程：

- 随机选择两个位置
- 并将两点间的子串顺序颠倒。
- 这种变异通常称为逆变异。

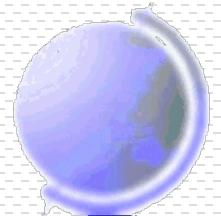
随机选择一个子串

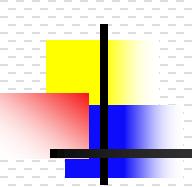


颠倒子串



- Tate和Smith的实验结果说明他们的GA的性能是非常令人鼓舞的。简单的变异和交叉就能和以前提出的知名的启发式方法媲美，且不必小心地选择变异率、种群大小以及其它参数。





# End